ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **PC**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours PC, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et rappels

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n et J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie pour $A = (a_{ij})$ par :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

On admet que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\|AB\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

On désigne enfin par $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ dont tous les coefficients sont **positifs ou nuls** et vérifient :

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

I. Étude d'exemples

1. **Le cas de la dimension** 2.

   Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $a = a_{11}$ et $b = a_{21}$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a_{12}, a_{22}, a et b pour que A soit dans $\mathcal{K}_2$.

   (b) Dans cette question et la suivante, on suppose que $A \in \mathcal{K}_2$ et que $a - b \neq 1$; déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.

   (c) Étudier alors la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

2. **Étude d'un exemple en dimension n**

   Soient α et β deux réels, avec $\beta \neq 0$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonnaux sont égaux à α, les autres valant β.

   (a) Calculer J_n^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Exprimer M à l'aide des matrices I_n et J_n puis en déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de M^p comme combinaison linéaire de I_n et J_n.

   (c) On suppose que $M \in \mathcal{K}_n$ et que $n \geqslant 3$. Montrer que $|\alpha - \beta| < 1$ et en déduire le comportement de la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$. Si elle converge, quelle est sa limite ?

   (d) Retrouver le résultat de la question précédente en calculant les valeurs propres de M puis en justifiant qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $p(x)$.

7. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

On note $B = (b_{ij})$, et pour tout $k \in N^*$, $A^k = (a_{ij}^{(k)})$.

(a) Vérifier que pour tout $k \in N^*$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f^k(e_i) - p(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ji}^{(k)} - b_{ji})e_j$.

(b) Exprimer $\|{}^t(A^k) - {}^tB\|_\infty$ en fonction de $N_1\left(f^k(e_1) - p(e_1)\right), \ldots, N_1\left(f^k(e_n) - p(e_n)\right)$ et conclure alors que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vers la matrice B.

III. Quelques propriétés de matrices appartenant à $\mathcal{K}_n$

Dans cette partie, $A = (a_{ij})$ désigne un élément de $\mathcal{K}_n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Soit λ une valeur propre de u et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un **vecteur propre** associé.

A- Premiers résultats

1. Montrer que 1 est une valeur propre de u.
2. En faisant une traduction matricielle de l'égalité $u(x) = \lambda x$ et en choisissant un indice p tel que $|x_p| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Dans la suite, on pose $m = \min\{a_{ii}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
   (a) En utilisant une méthode analogue à la précédente, montrer que $|\lambda - m| \leqslant 1 - m$.
   (b) Dessiner le cercle $\mathcal{C}(0,1)$, de centre 0 et de rayon 1, et le disque fermé $\overline{D}(m, 1-m)$ sur un même graphique. (*on rappelle que* $\overline{D}(m, 1-m) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - m| \leqslant 1 - m\}$.)
4. On suppose que $m > 0$; montrer que si λ est de module 1 alors $\lambda = 1$.
5. On suppose que $m > \frac{1}{2}$.
   (a) Vérifier que $0 \notin \overline{D}(m, 1-m)$ et conclure que A est une matrice inversible.
   (b) On pose $B = I_n - A$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{k=0}^{p} B^k$ avec la convention $B^0 = I_n$; montrer que $\|B\|_\infty < 1$ puis en déduire que la suite $(S_p)_{p\geqslant 0}$ est convergente.(*On pourra montrer que cette suite est de* CAUCHY).
   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer le produit AS_p à l'aide de I_n et B puis en déduire une expression de l'inverse de A sous forme de la somme d'une série de matrices.

B- Toute valeur propre de A de module 1 est une racine de l'unité

1. Soit r un entier naturel $\geqslant 2$; montrer par récurrence que si $z_1, \ldots, z_r$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{j=1}^{r} z_j\right| = \sum_{j=1}^{r} |z_j|$ alors il existe un complexe non nul z et des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\quad z_j = \alpha_j z$.

   Dans la suite de cette partie, on suppose que $|\lambda| = 1$ et on choisit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. On pose $I_0 = \{j \in \{1, \ldots, n\} /\ \ a_{i_0 j} x_j \neq 0\}$.

2. (a) Exprimer $\sum_{j\in I_0} a_{i_0 j}x_j$ à l'aide de λ et x_{i_0} et en déduire que I_0 est non vide.

   (b) Montrer que $\sum_{j\in I_0} a_{i_0 j} = 1$.

   (c) Vérifier que $\left|\sum_{j\in I_0} a_{i_0 j}x_j\right| = \sum_{j\in I_0} |a_{i_0 j}x_j| = |x_{i_0}|$ et en déduire, d'une part que

   $$\forall\, j \in I_0,\ |x_j| = |x_{i_0}|,$$

   d'autre part, en utilisant un résultat précédent, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ et d'une famille $(\alpha_j)_{j\in I_0}$ de réels positifs tels que

   $$\forall\, j \in I_0,\ a_{i_0 j}x_j = \alpha_j z.$$

   (d) Déduire de ce qui précède que

   $$\forall\, (j,k) \in I_0^2,\ x_j = x_k$$

   et que

   $$\lambda x_{i_0} = x_{i_1},\ i_1 \in \{1,\dots,n\}.$$

3. (a) Montrer qu'on peut construire une suite finie $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ telle que

   $$|x_{j_0}| = \dots = |x_{j_n}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

   et que

   $$\forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ \lambda x_{j_{k-1}} = x_{j_k}$$

   (b) En déduire alors qu'il existe $q \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\lambda^q = 1$.

4. Dans cette question, on suppose que tous les coefficients de A sont strictement positifs :

   $$\forall\, (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad a_{ij} > 0.$$

   En utilisant la question 2. (d) précédente, montrer que l'espace propre de u, associé à la valeur propre 1, est égal à $\mathbb{C}.e$ où $e = (1,\dots,1)$.

FIN DE L'ÉPREUVE